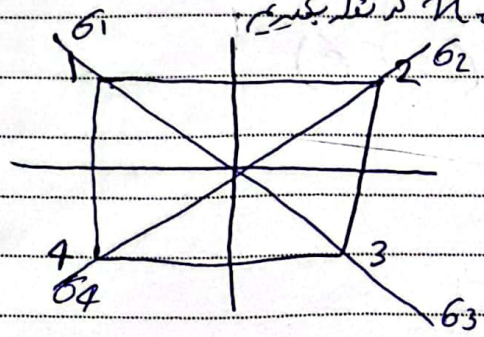
تمرینات:

1. گروه $D(n)$ یک مربع (۴ضلعی منتظم) و ۵ضلعی را بنویسید.
2. اگر $(G,\circ)$ گروه باشد آنگاه عضو وارون منحصر بفرد است.
3. $\forall a \in G \rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

سؤال اول: مربعی با رئوس $N = \{1,2,3,4\}$ در نظر بگیریم.



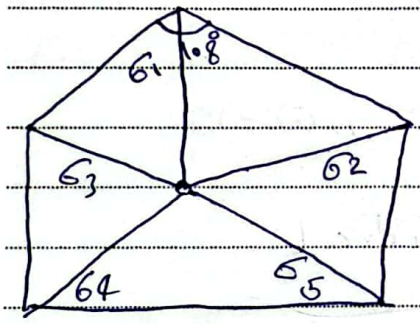
$r_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad r_2 = \pi$

$r_3 = \frac{3\pi}{2}$ $\quad r_4 = 2\pi$

$D_4 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$

$r_1 = 72 \quad r_2 = 144 \quad r_5 = 360$

$r_3 = 216 \quad r_4 = 288$



$D_5 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$

چهارضلعی:

$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$r_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

سؤال دوم: برهان خلف فرض می‌کنیم (فرض کلی) b و c دو وارون (یک عدد) منحصر بفرد نباشند (متمایز) و e عدد خنثی G باشد.

$\forall a,b,c \in G \Rightarrow a.b = b.a = e$

$a.c = c.a = e \Rightarrow \cancel{a}.c = \cancel{a}.b \Rightarrow c = b$

لذا تناقض با فرض که وارون‌ها متمایزند.

سؤال ۳:

چون که به ازای هر a^{-1}، $(a^{-1})^{-1}$ وارون a^{-1} است، پس:

$(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}.e = (a^{-1})^{-1}.(a^{-1}.a) \xrightarrow[\text{شرکت پذیری}]{\text{خاصیت}} [(a^{-1})^{-1}.a^{-1}].a = e.a = a$

Arman

$\exists k < j \quad \sigma^{j}(i) = \sigma^{k}(i)$ ، $\sigma^{j-k}(i) = i$ ← یک جایگشت مجزا

k قدم به گردد

$\sigma(\sigma^{j-k}(i), \ldots, 1)$ کوچک‌ترین دور را دارد ← $j-k$ کوچک‌ترین عدد ممکن در نظر می‌گیریم

← ترکیب دو جایگشت مجزا:

اثبات منحصر بفرد بودن: ابتدا تمام دورهای داده شده را به صورت دورهایی به طول ۲ (ترانهش) می‌نویسیم. حال ثابت می‌کنیم هر دور به طول ۲ منحصر بفرد است.

← به استقراء ثابت می‌کنیم

(1) ← ۱ عنصر

$(1\ 2)$ ← ۲ عنصر ← ۲ دور $(12), (21)$ ← این دو دور با هم مساوی هستند

فرض می‌کنیم برای تمامی اعداد قبل از n برقرار باشد.

برای n ثابت می‌کنیم: $(1, \ldots, n) \to (1\ 2\ 3 \ldots n) \circ (1\ 2) \circ (1\ 2) \ldots$

← وجود برای اعداد قبل از n ثابت کردیم که منحصر بفرد است

ترانهشت: اعضای تکیه‌گاه ۲ تا باشند. این دور را به صورت ترکیبی از ترانهش‌ها می‌نویسیم.

← $(1 \ldots n)$ نیز منحصر بفرد است.

Subject:
Year: Month: Day: page: ( )

تمرین: صفحه ۶۸، سؤال ۷ و ۸

سؤال ۷.

$$\forall T, U \in S_n \text{ st } M_T \cap M_U = \emptyset \iff \begin{cases} \text{if } T(i) \neq i \to U(i) = i \\ \text{if } T(i) = i \to U(i) \neq i \end{cases}$$

اثبات رفت، برای $i \in X_n$ دو حالت وجود دارد.

$$\begin{cases} T(i) \neq i \to i \in M_T \xrightarrow{M_T \cap M_U = \emptyset} i \notin M_U \to i \in F_U \to U(i) = i \\ T(i) = i \to i \in F_T \to i \notin M_T \xrightarrow{M_T \cap M_U = \emptyset} i \in M_U \to U(i) \neq i \end{cases}$$

اثبات برگشت

$$\begin{aligned} &\text{if } T(i) \neq i \to U(i) = i \quad \text{i.e. } i \in M_T \ \& \ i \notin M_U \\ &\text{if } T(i) = i \to U(i) \neq i \quad \text{i.e. } i \notin M_T \ \& \ i \in M_U \end{aligned} \Rightarrow M_T \cap M_U = \emptyset$$

سؤال ۸.

T, U معرا می‌باشند $\to M_T \cap M_U = \emptyset$

برای هر $i \in X_n$ سه حالت وجود دارد:

$$(I)\ i \in F_U \ \& \ i \in F_T \to \begin{cases} TU(i) = T(U(i)) = T(i) = i \\ UT(i) = U(T(i)) = U(i) = i \end{cases} \to TU = UT \checkmark$$

$$(II)\ \text{if } i \in M_T \xrightarrow{M_T \cap M_U = \emptyset} i \in F_U \to \begin{cases} TU(i) = T(U(i)) = T(i) = j \neq i \\ UT(i) = U(T(i)) = U(j) = j \end{cases}$$

$$(III)\ \text{if } i \in M_U \xrightarrow{M_T \cap M_U = \emptyset} i \in F_U \to \begin{cases} TU(i) = T(U(i)) = T(j) \\ UT(i) = U(T(i)) = U(j) = j \end{cases}$$

$j < i$

$j \in M_T \to j \in F_U$

$j \in M_U \to j \in F_T$

تعریف

$$\prod_{n} (x_i - x_j)$$

تمرین‌ها صفحات ۷۲ و ۹۱ و ۹۵

- تمرین ۱۵ صفحه ۷۲: وارون یک دور $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ به طول r را پیدا کنید.

حل: $(a_1, a_2, a_3 \dots a_{r-1}\ a_r)$

$$\hookrightarrow T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & a_r \\ a_2 & a_3 & \dots & a_r & a_1 \end{pmatrix}$$

وارون T $\longrightarrow$ $$T^{-1} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_r & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{r-1} & a_r \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow T^{-1} = (a_2\ a_1\ a_r\ a_{r-1}\ a_4\ a_3)$$

- تمرین ۱۶ صفحه ۷۲: تمام توان‌های دور $(1\ 2\ 3 \dots 8)$ و $(1\ 2\ 3 \dots 9)$ را بنویسید.

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} = T$$

ترکیب اول $T \circ T = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \circ (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \downarrow T^2$

ترکیب دوم $T \circ T^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \circ T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow T^3$

ترکیب سوم $T \circ T^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \circ T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow T^4$

ترکیب چهارم $T \circ T^4 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \circ T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow T^5$

ترکیب پنجم $T \circ T^5 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \circ T^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow T^6$

ترکیب ششم $T \circ T^6 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \circ T^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow T^7$

ترکیب هفتم $T \circ T^7 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \circ T^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I = T^8$

$\hookrightarrow$ در نتیجه دور $(1\ 2\ 3 \dots 8)$ ، ۸ توان دارد.

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad T^2$$

ترکیب اول $T \circ T = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) \circ (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) = (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 2\ 4\ 6\ 8)$

ترکیب دوم $T \circ T^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) \circ (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 2\ 4\ 6\ 8) = (1\ 4\ 7) \circ (2\ 5\ 8) \circ (3\ 6\ 9)$

$\hookrightarrow T^3$

ترکیب سوم $T.T^3 = (۱۲۳۴۵۶۷۸۹)\circ(۱۴۷)\circ(۲۵۸)\circ(۳۶۹)$
$= (۱۵۹۴۸۳۷۲۶) \to T^4$

ترکیب چهارم $T.T^4 = (۱۲۳۴۵۶۷۸۹)\circ(۱۵۹۴۸۳۷۲۶)$
$= (۱۶۲۷۳۸۴۹۵) \to T^5$

ترکیب پنجم $T.T^5 = (۱۲۳۴۵۶۷۸۹)\circ(۱۶۲۷۳۸۴۹۵)$ T^6
$= (۱۷۴)\circ(۲۸۵)\circ(۳۹۶)$

ترکیب ششم $T.T^6 = (۱۲۳۴۵۶۷۸۹)\circ(۱۷۴)\circ(۲۸۵)\circ(۳۹۶)$ T^7
$= (۱۸۶۴۲۹۷۵۳)$

ترکیب هفتم $T.T^7 = (۱۲۳۴۵۶۷۸۹)\circ(۱۸۶۴۲۹۷۵۳)$ T^8
$= (۱۹۸۷۶۵۴۳۲)$

ترکیب هشتم $T.T^8 = (۱۲۳۴۵۶۷۸۹)\circ(۱۸۶۴۲۹۷۵۳) = I = T^9$
برنتیجه دور (۹ ـــ ۱۲۳) ؛ ۹ توان دارد.

★ دورهای توانی بخش اول:

$T^2 = (۱۳۵۷)\circ(۲۴۶۸)$
$T^3 = (۱۴۷۲۵۸۳۶)$ $T^4 = (۱۵)\circ(۲۶)\circ(۳۷)\circ(۴۸)$
$T^5 = (۱۶۳۸۵۲۷۴)$ $T^6 = (۱۷۵۳)\circ(۲۸۶۴)$
$T^7 = (۱۸۷۶۵۴۳۲)$ $T^8 = I$

تمرین ۶ صفحه ۹۱: فرض کنید $S = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ ؛ عمل $*$ را روی S به صورت $a*b = a+b-ab$ تعریف کنید. ثابت کنید که S همراه با عمل $*$ یک گروه است.

$*: S.S \to S$

اول ثابت می‌کنیم که این هیچ عملگر بی توان باشد ـــ

$\forall a,b \in S,\ a,b \neq 1 \to a*b = a+b-ab \neq 1$ تناقض با فرض مسئله

خلف $\to a+b-ab = 1 \to a(1-b)+b = 1 \to a(1-b) = 1-b \to a = 1$ ✗

سه ویژگی گروه بودن:

1) شرکت پذیری:

$$\forall a,b,c \in S \begin{cases} (a*b*c) = (a+b-ab)*c = a+b-ab+c-ac-bc+abc \\ a*(b*c) = a*(b+c-bc) = a+b+c-bc-ab-ac+abc \end{cases}$$

2) عضو خنثی

$\forall a \in S$, عضو خنثی $e \to a*e = a+e-\cancel{ae} = e+a-\cancel{ea} = e+a$
$\to e = 0$

3) عضو وارون

$\forall a \in S \to a*a^{-1} = a+a^{-1}-aa^{-1} = e$
a^{-1} $a^{-1}(1-a) = \cancel{e}-a \to a^{-1}(1-a) = -e$

Arman

$\to a^{-1} = \frac{-a}{1-a} \to \boxed{a^{-1} = \frac{a}{a-1}} \to$ عضو وارون

$\forall a, a^{-1} \in S, \ a^{-1} = \frac{a}{a-1}$

$a^{-1} * \frac{a}{a-1} = a + \frac{a}{a-1} - a\frac{a}{a-1} = a + \frac{a}{a-1} - \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2 - a + a - a^2}{a-1} = 0 = e$

- تمرین ۲۶ صفحه ۹۵: فرض کنید G یک گروه متناهی باشد که مرتبه آن عددی است زوج. ثابت کنید که یک عنصر $a \neq e$ در G وجود دارد به قسمی که $a^2 = e$

چون G یک گروه متناهی است، هر عضو دو به دو عضو وارون دارد. لذا برای اثبات این قضیه باید در ابتدا G را فرد کرد.

اثبات: $|G| =$ زوج $\rightarrow |G - \{e\}| =$ فرد

لی G فرد است لذا حداقل یک عضو در G وجود دارد که غیر همانی است و وارون خودش نیز است. یعنی:

$\exists a \in G \ st. \ a \neq e \ , a^2 = e$ ← a وارون خود نیز است.

سؤال) در $(\mathbb{Z}_{12}, +)$، تمام زیرگروه‌های از مرتبه ۴ آن را بیابید؟

از آنجایی که $4 | 12$ درنتیجه تنها یک زیرگروه از مرتبه ۴ وجود دارد.

برای محاسبه زیرگروه مرتبه ۴، تمام اعداد مجموعه $\mathbb{Z}_{12}$ را بررسی می‌کنیم و هرکدام که مولد کون مجموعه آن ۴ عضو داشت، زیرگروه ما خواهد شد و از آنجایی که تنها یک زیرگروه مرتبه ۴ داریم، وقتی به جواب رسیدیم دیگر ادامه نمی‌دهیم.

عدد ۱ که مولد است.

عدد ۲: $2+2+2+2+2 = 10$ ، $2+2+2+2 = 8$ ، $2+2+2 = 6$ ، $2+2 = 4$ ، $2 = 2$

لی از آنجایی که تا این مرحله زیرگروه تولید شده توسط ۲، بالای ۴ عضو دارد، جواب ما نیست.

حال برای عدد ۳: $3+3+3+3 = 0$ ، $3+3+3 = 9$ ، $3+3 = 6$ ، $3 = 3$

لی برای باقی اعداد نیز همین که عدد خواهد بود. درنتیجه تنها زیرگروه مرتبه ۴ ما، زیرگروهی است که مولد آن عدد ۳ است.

تمرین: همه هم دسته های H را بنویسید.

$(S_3, \circ)$

$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (132), (123)\}$

$H = \{e, (12)\}$

$[(13) \circ H] = [(13), (123)]$

$[(132) \circ \underbrace{(12)}_{H}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (2\ 3)$

$[(132)] \circ H = \{(23), (132)\}$

$[(12)] \circ H = H$

$H \circ [(12)] = H$

$[e] \circ H = H$

$H \circ [e] = H$

$H \circ [(132)] = \{(132), (13)\}$

$[(23)] \circ H = \{(23), (132)\}$

$H \circ [(23)] = \{(23), (231)\}$

$[(13)] \circ H = \{(13), (123)\}$

$H \circ (13) = \{(13), (132)\}$

$[(123)] \circ H = \{(123), (13)\}$

$H \circ [(123)] = \{(123), (23)\}$

اگر $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$ ، ثابت کنیم $(A, \underset{\text{ماتریسی}}{\times})$ یک گروه دوری است و مولد آن را بدست آورید.

در ابتدا ثابت می کنیم که $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m$

$m = 2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$m = 0 \longrightarrow$ ماتریس به توان صفر یا همان ماتریس همانی

$m = -1 \longrightarrow \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-0)} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Arman

پس اعداد 2 و 0 و 1- ثابت شد.

Subject:
Year: Month: Day: page: ( )

فرض استقرا: فرض می کنیم برای اعداد مثبت کوچک تر از n برقرار باشد.

برای n، اعداد منفی باید اثبات کنیم.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^{n-1} = \begin{bmatrix}1 & n-1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

مثبت:

حال (مولد ضرب می کنیم)

$$\begin{bmatrix}1 & n-1\\0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1+n-1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix} = A^{n-1} \times A = A^n$$

← برای n اعداد مثبت اثبات شد.

اعداد منفی:

$$A^{-n} = A^{(-1)^n} \qquad n \in N$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{bmatrix}}$$

با استقرا ثابت می کنیم:

$n=1 \longrightarrow A^{(-1)^1} = A^{-1}$ که ثابت کردیم برقرار است.

حال فرض می کنیم برای اعداد کمتر از n برقرار است، برای خود n اثبات می کنیم.

$$\begin{bmatrix}1 & -(n-1)\\0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & a_{12}\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$a_{12} = -1 - n + 1 = -n$$

$$\longrightarrow A^{-n-1} \times A^{-1} = A^{-n}$$

← پس برای اعداد منفی نیز برقرار است.

مولدهای اعداد مثبت $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ و مولدهای اعداد منفی $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

تمرین: حاصل $O((123)O(12))$ را بدست آورید.

$$(123)O(12) = (13)$$

$$(13)O(13) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = I \text{ همانی}$$

$$\Rightarrow O((123)O(12)) = 2$$

تمرین: فرض کنید G یک گروه دوری از مرتبه n است. H از مرتبه d است به طوری که $d|n$. ثابت کنید H زیرگروهی از G است.

$$(G, \cdot) = \langle a \rangle$$

$$n = qd \qquad H = \{a^q, a^{2q}, \dots, a^{dq}\}$$

Arman

اگر H زیرگروه باشد به این معناست که سه شرط زیر را داشته باشد.

1) عضو خنثی a^{nqd} همان عضو خنثی است زیرا برابر است با a^n که این عضو در گروه G همان عضو خنثی ما است

2) دو عضو دلخواهی گیریم: $a^{m_1 q}, a^{m_2 q}$ بسته باشد.

$$a^{n_1 q} \times a^{n_2 q} = a^{(n_1 q + n_2 q)} = a^{(n_1+n_2)q}$$

از آنجایی که (n_1+n_2) مضربی از q است در نتیجه حتماً در گروه وجود دارد.

3) عضو وارون $a^{pq} \cdot a^{mq} = a^{qd}$ عضو خنثی

$$a^{(pq+mq)} = a^{(p+m)q} = a^{dq}$$

$$\Rightarrow p+m = qd \Rightarrow m = qd - p$$

پس عضو وارون دارد و برای عددی مثل a^{mq}، برابر خواهد بود با $a^{(d-p)q}$